

Electromagnétisme des MILIEUX

TD série 1

responsable : Mr Zoheir

Milieux Diélectrique

Exercices

On rappelle que les densités surfacique et volumique de polarisation sont données respectivement par

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_p = -\text{div} \vec{P}, \quad \vec{P} \text{ étant le vecteur polarisation.}$$

Déterminer les densités de charges surfaciques σ_p et volumiques ρ_p dans les cas suivants :

- 1) Cylindre d'axe Oz, uniformément polarisé perpendiculairement à son axe : $\vec{P} = P\vec{e}_x$. On exprimera le résultat en fonction de $\vec{P}$ et on travaillera en coordonnées $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
- 2) Cylindre de rayon R dont la polarisation est radiale $\vec{P} = \left(\frac{P_0 R}{r}\right)\vec{e}_r$ où $P_0 = \text{Cste}$
- 3) Cylindre de rayon R dont la polarisation est $\vec{P} = P_0 \cos \theta \vec{e}_r + P_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$ où $P_0 = \text{Cste}$

On donne pour un vecteur quelconque : $\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Problème 1

On place une boule diélectrique de permittivité ϵ , avec une polarisation $\vec{P} = P\vec{e}_r$ ($P=\text{cste}$) et $\vec{E}_0 = \vec{0}$.

- 1) De quelle type de polarisation s'agit-il?
- 2) calculer les charges fictives de polarisation et leur somme algébrique
- 3) En utilisant le théorème de Gauss, établir le champ électrique en un point quelconque de l'espace (On affectera l'indice 1 à ce qui est intérieur à la sphère et l'indice 2 à ce qui est extérieur)
- 4) Déterminer les vecteurs diélectriques $\vec{D}_1$ à l'intérieur et $\vec{D}_2$ à l'extérieur, puis vérifier la relation de passage entre les deux milieux. (on rappelle que $\vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P}_i$, $i = 1, 2$; $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_{21} = \sigma$ où σ la densité de charges surfacique de conduction; $\vec{n}_{21}$ la normale à la surface allant de 2 vers 1)
- 5) Déterminer l'énergie due à la polarisation de cette sphère diélectrique à partir de l'intégrale $\int \vec{P} \cdot \vec{E} d\tau$ où $d\tau$ est l'élément de volume

Problème 2:

Une cavité cylindrique d'axe $\vec{O}_z$, de très grandes dimensions, est remplie d'un matériau diélectrique. On suppose que la polarisation $\vec{P} = P\vec{e}_z$ est uniforme.

On note α_1 et α_2 les demi angles sous lesquelles on voit, à partir d'un point M de l'axe les deux surfaces de base Sb_1 et Sb_2 .

- 1) Calculer les différentes charges de polarisation.
- 2) En déduire le champ de polarisation $\vec{E}_p$ au point M en fonction de $\vec{P}$, α_1 , α_2 et ϵ_0 (vous pourriez, pour cela, utiliser l'angle solide sous lequel on voit Sb_1 (et Sb_2) du point M)
- 3) Donner l'expression du champ $\vec{E}_p$ au centre du cylindre et en déduire les valeurs du champ pour une cavité plate (hauteur $\ll$ rayon) et une cavité longue (hauteur $\gg$ rayon)

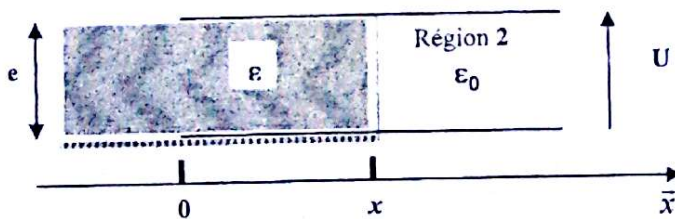
Problème 3.

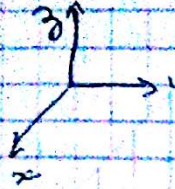
Un condensateur est formé par deux armatures planes métalliques en regard portées à une différence de potentiel U . On note S la surface des armatures, b leur largeur et l leur longueur. Les dimensions des armatures sont très grandes devant leur écartement e .

Une lame diélectrique homogène linéaire et isotrope de permittivité ϵ est partiellement introduite de façon quasistatique entre les armatures de ce condensateur.

On notera x la distance introduite entre les armatures

1. a) Ecrire la condition de passage pour la composante normale $\vec{D}$ entre le conducteur et le diélectrique (région 1), puis entre le conducteur et l'air (région 2)
b) Ecrire la relation de passage pour la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ entre le diélectrique et l'air.
2. **Etablir** à partir des résultats de la question 1, l'expression de la capacité C du condensateur.
3. Donner l'expression de la force qui agit sur le diélectrique.
4. On considère que le condensateur est rempli de diélectrique
 - a) Calculer la nouvelle capacité
 - b) exprimer l'énergie dépensée pour la polarisation du diélectrique W_p et l'énergie dépensée par le générateur pour déplacer le diélectrique W_f . Conclusion.





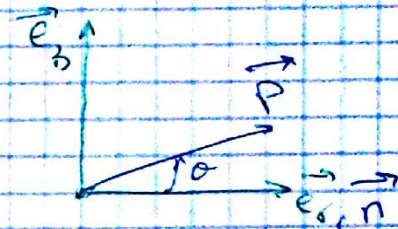
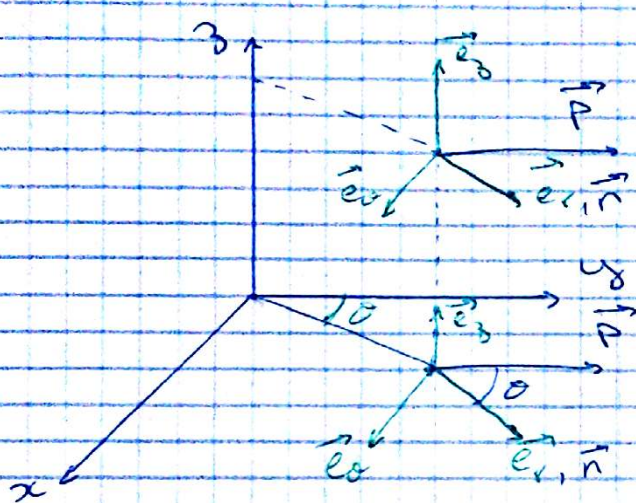
ELECTRICITE 3

TD série 1

* Exercice 1:

Expressions des densités de charges en surface (σ_p) et en volume (ρ_p) ds les cas:

1°) - Cas d'un cylindre; $\vec{P} = P\vec{e}_x$



* Expression de σ_p ($r=R$):

On a , $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$

$$\sigma_p = \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta \\ \vec{n} = \vec{e}_r \end{cases}$$

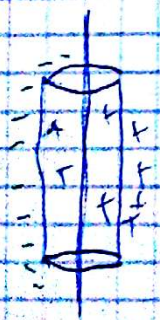
Donc , $\sigma_p = P(\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_r$

$$\boxed{\sigma_p = P \cos\theta}$$

De cette expression, on déduit le signe de la charge surfacique.

- si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ creation des charges positives

- si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ " " " negatives



• Expression de ρ_p :

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div} (P \cos \theta \vec{e}_r - P \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= -P \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \cos \theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right) = -P \left(\frac{\cos \theta}{r} - \frac{\cos \theta}{r} \right) = 0\end{aligned}$$

2) Cas d'un cylindre de rayon R et $\vec{P} = \left(\frac{P_0 R}{r} \right) \vec{e}_r$

• Expression de $\sigma_p (r=R)$

$$\text{On a, } \vec{P}(r=R) = \frac{P_0 R}{R} \vec{e}_r = P_0 \vec{e}_r$$

$$\sigma_p(r=R) = \vec{P}(r=R) \cdot \vec{e}_r = \boxed{P_0} > 0$$

Donc, en surface apparaît des charges > 0

• Expression de ρ_p :

$$\begin{aligned}\text{On a, } \rho_p &= -\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div} \left(\frac{P_0 R}{r} \vec{e}_r \right) \\ &= - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r P_0 R}{r} \right) + 0 + 0 \right] = \boxed{0}\end{aligned}$$

Les valeurs montrent que ce type de polarisation crée des charges uniquement en surface

3) Cas d'un cylindre de rayon R
et $\vec{P} = P_0 \cos \theta \vec{e}_r + P_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$

• Expression de $\sigma_p (r=R)$:

$$\text{On a, } \sigma_p(r=R) = \vec{P} \cdot \vec{n} = \boxed{P_0 \cos \theta}$$

On déduit l'apparition des charges comme dans le 1^{er} cas

• Expression de ρ_p :

$$\text{On a: } \rho_p(r) = -\operatorname{div} \vec{P} = - \left[\frac{1}{r} P_0 \cos \theta + \frac{P_0 \cos \theta}{r} \right]$$

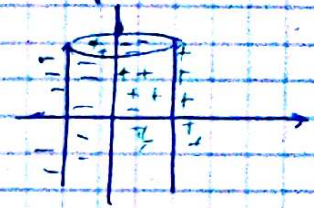
$$P = - \frac{2 P_0 \cos \theta}{r}$$

cette expression, montre:

• Si $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos \theta > 0$ et $P < 0$

• Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, il $\cos \theta < 0$ et $P > 0$

$|P(r)|$ diminue avec r

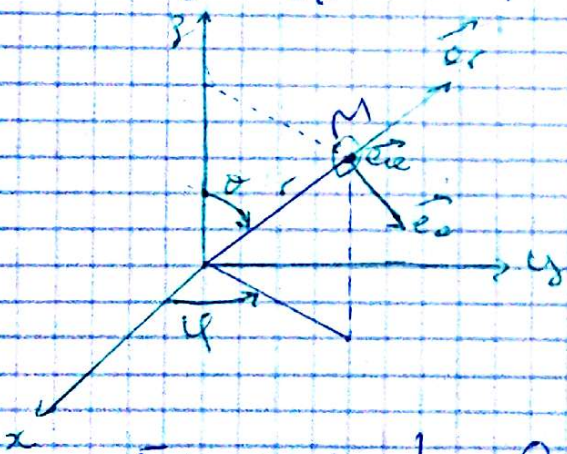


* Problème 1:

1/- polarisation instantanée

2/- Expression et valeurs des:

charge Q_{Ps} en surface et Q_{Pv} en volume, somme algébrique



* Expression de Q_{Ps} :

+ Expression de $\sigma_p (r=R)$:

$$\text{On a, } \sigma_p (r=R) = \vec{P}(r=R) \cdot \vec{e}_r = \boxed{P} > 0$$

$$dQ_{Ps} = \sigma_{Ps} \cdot dS = P dS$$

donc $Q_{Ps} = \iint_{\text{surface de la sphère de rayon R}} dQ_{Ps}$

$$= \iint_{\text{sphère, R}} P d\mathcal{S} = P \iint_{\text{sphère, R}} d\mathcal{S} = P \cdot \mathcal{S}_{\text{sphère}} = \underline{P \cdot 4\pi R^2}$$

* Expression de Q_{Pr} :

→ Expression de $\rho_p(r)$:

$$\rho_p(r) = -\operatorname{div} \vec{P} = -\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) \right] = \underline{\frac{-2P}{r}}$$

Donc, Q_{Pr} est donnée par:

$$dQ_{Pr} = \rho_p(r) dv = \frac{-2P}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

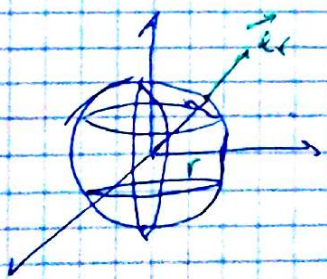
$$\Rightarrow Q_{Pr} = \iiint_{\text{volume de la sphère, R}} dQ_{Pr} = \iiint -2P r \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= -2P \int_0^R r dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -2P \frac{R^2}{2} 4\pi = \underline{-4\pi P R^2}$$

Somme des charges Q :

$$Q = Q_{Ps} + Q_{Pr} = 0$$

3/. Expression du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur, en utilisant le théorème de Gauss:



Par raison de symétrie, le champ électrique est radial.

$$\vec{E}_r = E_r(r) \vec{e}_r$$

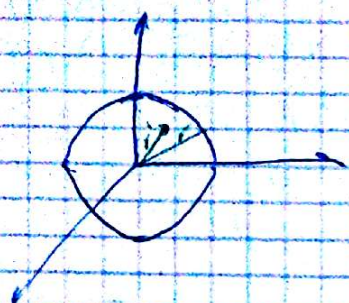
$$\iint_{\text{sphère, r}} \vec{E}_r \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

charge à l'intérieur (de rayon r)

$$\rightarrow \iint_{\text{sphère, r}} \vec{E}_r \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \iint_{\text{sphère, r}} E_r(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{\mathcal{S}} \vec{e}_r = E_r(r) \iint d\mathcal{S}$$

$$= \underline{E_r(r) \cdot 4\pi r^2}$$

→ Expression de Q_p à l'intérieur de la sphère de r



$$dQ_p = \rho(r=r') \cdot dv$$

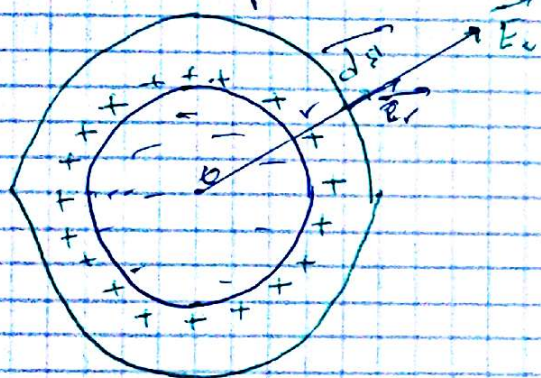
$$= -\frac{P}{\epsilon_0} \frac{4\pi r'^2}{r} \sin\theta dr' d\theta d\phi$$

$$dQ_p = -\frac{2P}{\epsilon_0} \sin\theta dr' d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow Q_p = \iiint_{\text{sphère, } r} dQ_p = -\frac{2P}{\epsilon_0} \int_0^r r' dr' \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$Q_p = -\frac{4\pi P}{\epsilon_0} r^2$$

4 Expression du $\vec{E}_e$ à l'extérieur:



$$\text{On a } \iint_{\text{sphère, } r} \vec{E}_e \cdot d\vec{\xi} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\iint_{\text{sphère, } r} \vec{E}_e \cdot d\vec{\xi} = \iint E_e d\xi = E_e \iint d\xi = E_e \cdot 4\pi r^2$$

$$Q_{\text{int}} = 0$$

$$\text{donc } \vec{E}_e = \vec{0}$$

4/. Expression de $\vec{D}_i$ et $\vec{D}_e$ et vérification de l'équation de passage lorsque $r=R$

$$\text{On a, } \vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P} = \epsilon_0 \left(-\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\vec{D}_e = \epsilon_0 \cdot 0 + 0 = 0$$

On a lorsque $r=R$:

$$(\vec{D}_i - \vec{D}_e) \cdot \vec{n}_1 = \sigma \text{ (diélectrique)}$$



Puisque " $0=0$ " alors la relation est bien vérifiée.

5/- Expression de W_p :

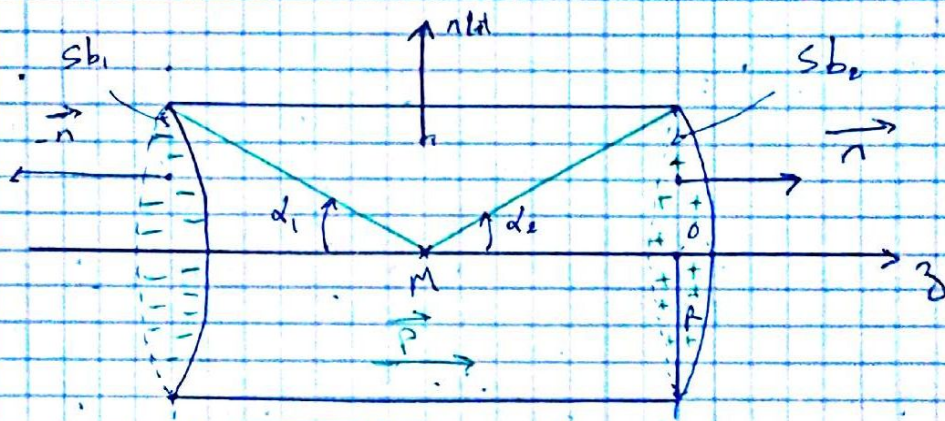
On a:
$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{\text{sphère, } R} \vec{P} \cdot \vec{E}_1 d\tau = \frac{1}{2} \iiint \vec{P} \left(\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) d\tau$$

$$W_p = - \frac{1}{2 \epsilon_0} \iiint \vec{P} \cdot \vec{P} d\tau = - \frac{P^2}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

(etc)

$$W_p = - \frac{2 \pi P^2 R^3}{3 \epsilon_0}$$

* Problème 2:



On a: $\sigma_{P_{S_{b2}}} = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = P$; (et $Q_{P_{S_{b2}}} = P \times \pi R^2$)

différent

• $\sigma_{P_{S_{b1}}} = \vec{P} \cdot (-\vec{n}) = -P$; (et $Q_{P_{S_{b1}}} = -P \pi R^2$)

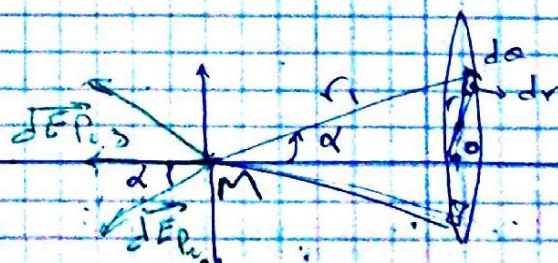
charge

• $\sigma_{P_{\text{lat}}} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{lat}} = 0$

* $\rho_P = -\text{div } \vec{P} = -\left[0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial z}\right] = 0$

2/- Expression du $\vec{E}_p$ au pt M:

$$\vec{E}_p = \underbrace{\vec{E}_{p_2}}_{S_{b2}} + \underbrace{\vec{E}_{p_1}}_{S_{b1}}$$



La surface S crée un champ $\vec{E}_2$ (Sb_2)

$$|dE_{p_2}| = \frac{d\Phi}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{P \cdot r dr d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$$

Sa composante suivant $\vec{Oz}$ est :

$$\begin{cases} \bullet |dE_{p_{2z}}| = \frac{P r dr \cos\alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \\ \bullet \cos\alpha = \frac{OM}{r_1} ; r_1^2 = r^2 + OM^2 \end{cases}$$

Aussi, par raison de symétrie, le champ $\vec{E}_2$ est porté par l'axe $\vec{Oz}$:

$$\begin{aligned} |E_2| = |E_{p_{2z}}| &= \iint_{\text{Surface } Sb_2, R} dE_{p_{2z}} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r OM}{r_1^3} dr \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &= \frac{P OM}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + OM^2)^{3/2}} \cdot 2\pi = \frac{P \cdot OM}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + OM^2}} \right]_0^R \\ &= \frac{P OM}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + OM^2}} - \frac{1}{OM} \right] \\ &= - \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{OM^2}}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Puisque, $\tan\alpha_2 = \frac{R}{OM}$, alors

$$|E_{p_2}| = - \frac{P}{2\epsilon_0} [\cos\alpha_2 - 1]$$

$$\Rightarrow |E_{p_2}| = \frac{P}{2\epsilon_0} [1 - \cos\alpha_2]$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{p_2} = - \frac{P}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha_2) \vec{e}_3 = - \frac{(1 - \cos\alpha_2)}{2\epsilon_0} \vec{p}$$

Le $\sim$ calcul nous permettent de déduire $\vec{E}_p$ crée

par $\vec{E}_1$:

$$\vec{E}_1 = - \frac{(1 - \cos \alpha_1)}{2 \epsilon_0} \vec{P}$$

Donc, le champ $\vec{E}_1$:

$$\vec{E}_1 = - \frac{(2 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{2 \epsilon_0} \vec{P}$$

3°/ Expression $\vec{E}_0$ au centre, $h \ll R$, $h \gg R$

Au centre, on a:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

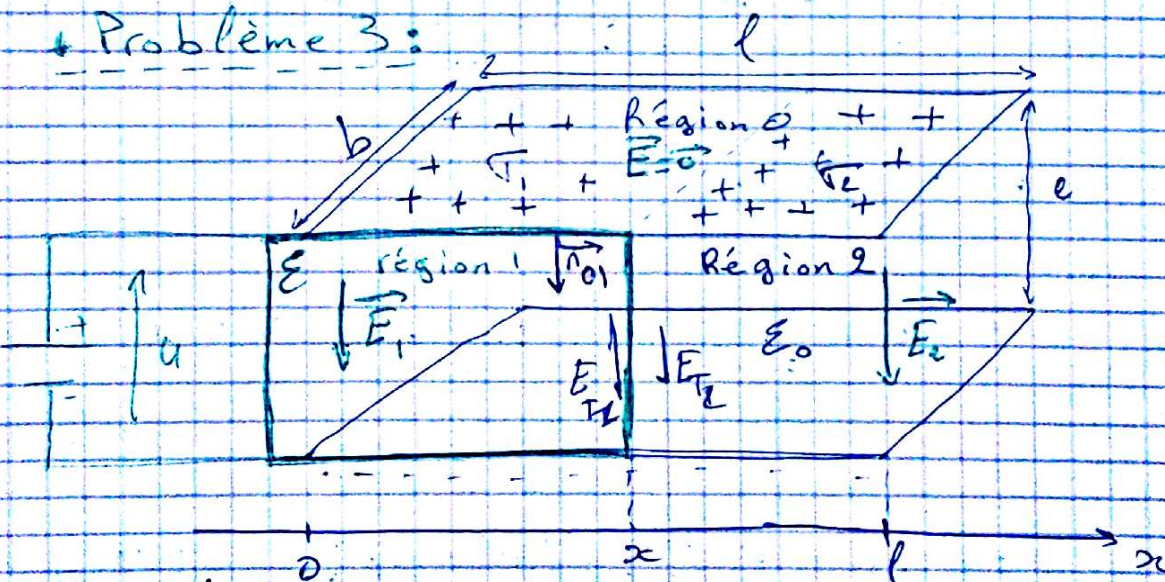
$$\cos \alpha = \frac{R}{(R^2 + (\frac{R}{2})^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}_0 = - \frac{(1 - \cos \alpha)}{\epsilon_0} \vec{P}$$

• Lorsque $h \ll R$ alors $\alpha = \frac{\pi}{2}$, donc: $\vec{E}_0 = - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$

• Lorsque $h \gg R$ alors $\alpha = 0$, donc: $\vec{E}_0 = 0$

Problème 3:



1°/ a/ Relation de passage entre les régions:

Région 0/R1 et R0/R2:

→ Région 0/R1:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_0) \cdot \vec{n}_{01} = \sigma_1 \quad \text{avec} \quad \vec{D}_1 = \epsilon \vec{E}_1, \vec{D}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{P} = \epsilon \chi \vec{E} \\ \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{01} = D_1 = \sigma_1 \Rightarrow \epsilon E_1 = \sigma_1$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon}}$$

* Région 0 / Région 2:

$$D_0 = \epsilon_0 E_0 + \vec{P} \Rightarrow 0 \text{ (pas de } \vec{P} \text{)}$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_0) \cdot \vec{n}_{02} = \sigma_2$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}_2, \vec{D}_0 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon}}$$

b/- Relation de passage :

$$\text{On a } E_{T1} = E_{T2}$$

$$E_1 = E_{T1}, E_2 = E_{T2}$$

$$\text{donc } \frac{\sigma_1}{\epsilon} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

2°/-

Expression de C :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{\sigma_1 b x + \sigma_2 b (l-x)}{U}$$

$$\text{avec, } E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon}, E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{e} \quad \left(- \int_1^2 dV = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V_2 - V_1 = U = -E \cdot e \right) \Rightarrow E = \frac{U}{e}$$

$$\Rightarrow C = \frac{E_1 \epsilon b x + E_2 \epsilon_0 b (l-x)}{U} = \frac{\epsilon b x + \epsilon_0 b (l-x)}{e}$$

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 b l}{e} + \frac{b(\epsilon - \epsilon_0)x}{e}}$$

3 - Expression de la force $\vec{F}$:

$$\text{On a, } \boxed{dW = F \cdot dx \Rightarrow F = \frac{dW}{dx}}$$

$$\text{avec: } W = \frac{1}{2} C u^2$$

$$\text{Donc } F = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right) = \frac{u^2}{2} \frac{d}{dx} C$$

$$\boxed{F = \frac{u^2}{2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) b}{e}}$$

4 - a - Expression de C lorsque $x = l$

D'après (q.3) on déduit:

$$\boxed{C = \frac{\epsilon b l}{e}}$$

→ Conclusion:

cette expression montre que C dépend du diélectrique utilisé.

b -

$$\text{On a; } W_P = \frac{1}{2} \iiint_{\text{volume du condensateur}} \vec{P} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

$$\text{avec; } \left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$W_P = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2} \iiint E^2 d\tau = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2} \frac{u^2}{e^2} b l x = \boxed{\frac{(\epsilon - \epsilon_0) u^2 b l}{2 e}}$$

$$\bullet W_F = \int_0^l \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^l F dx = \frac{u^2}{2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) b}{e} l$$

→ Conclusion: $W_F = W_P$